

以賽局決策模型支援國土安全警示系統

吳正光

中原大學軍訓室
中北路200號
桃園縣320中壢市
samwu@cycu.edu.tw

陳奕明

國立中央大學資訊管理學系
中大路300號
桃園縣320中壢市
cym@mgt.ncu.edu.tw

吳大任

國立中央大學經濟學系
中大路300號
桃園縣320中壢市
drwu@mgt.ncu.edu.tw

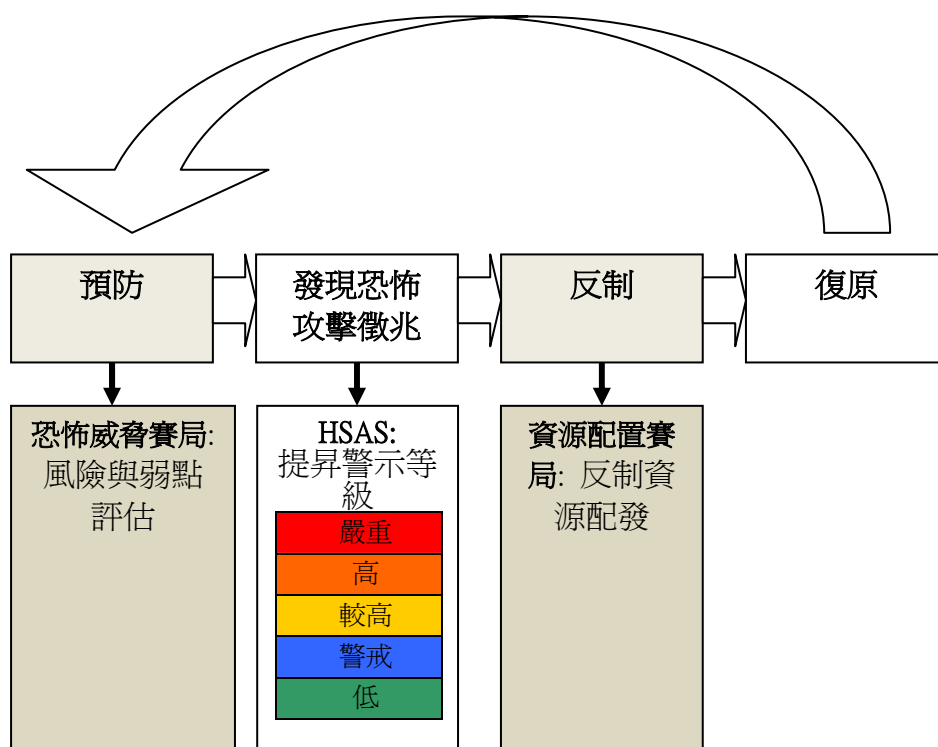
摘要

現今國土安全警示系統以分級的方式提供政府部門對恐怖攻擊的預警，但該系統缺少一個計算攻擊者與防守者間互動的量測模型，以致無法合理的評估當時的緊急情況並給予適當指示。一個有效的緊急事件反制系統，必須能決定何處及何時提昇警示等級？並在面對資源匱乏的情況下，能適時地建議維安部隊指揮官配置重要反制資源，以發揮反制恐怖攻擊的效果。本研究專為國土安全警示系統設計一個整合式的賽局架構，它可以依據不同的安全警示等級，將都會區內的資源做合理的分配。這架構由二個賽局模型所組成，第一個模型將每一區域中發生多起緊急事件和維安部隊指揮官之間的互動行為，模式化在一個零和賽局中，每個賽局發生恐怖攻擊的混合策略納許均衡值，當作一個區域中恐怖攻擊的威脅值。第二個模型加總各區域的威脅值並計算五個安全警示等級門檻值，再依據不同等級門檻值及所有區域的威脅值，計算每一個區域的夏普利值。然後依據這些夏普利值來配置反恐資源，以最小成本發揮最大資源分享效果。數值模擬結果顯示：指揮官應用此架構，不只可以很容易地獲得每個區域的恐怖攻擊威脅值，它還可以依據不同的安全警示等級，發現那些區域最容易被攻擊，並將有限的反制資源作合理的分配。

關鍵詞：恐怖攻擊威脅值、國土安全警示系統、夏普利值、混合策略納許均衡。

一、緒論

美國911事件恐怖分子爲了放大攻擊的效果，四組人員同時劫持四架民航客機，讓安全部門還來不及反應就造成大量的人員傷亡與財產損失，這類協同式的攻擊讓災難事件發生的時間重疊，以致消防、警政、交通、防暴及醫療各個單位，來不及反應而加大恐怖攻擊的威攝力。在都會的安全管轄區域中均備有一定的反制資源（如救護人員、維安人員、消防車及拖吊車等），以便於立即地反制各種緊急事件的發生。然而在某些區域仍缺乏反制資源，當發生多起的緊急事件時，因爲每一區的維安部隊指揮官具有不同的應變能力，中央緊急事件管制中心（emergency operation center: EOC）必須能因應各個的緊急事件，將各個發生緊急事件區域的資源作合理的分配，才能迅速的反制恐怖炸彈攻擊，以減少人員傷亡與財產的損失，如何有效地分配資源？將資源效用最大化，這是一個「資源配置效率」的問題。



圖一：防範恐怖攻擊的工作循環圖

1.現行反恐作法

美國政府爲了防範恐怖攻擊，特別建置國土安全警示系統（Homeland Security Advisory System：HSAS），這警示系統用五種顏色來區分不同恐怖攻擊的威脅程度，依不同的威脅程度對應不同的顏色，用強制性的方式讓政府機構能依顏色來反制恐怖攻擊，這系統還建議政府重要機關必須採取一些必要的防護措施，減緩恐怖攻擊的破壞力。然而，有些重要政府機構的管理人員認爲這系統並未發揮預警的功能，他們希望能提供一個能妥善利用現有資源的系統。除此之外，當發生恐怖攻擊時，希望能提供數值的模型來模式化攻擊者與防衛者之間的互動行爲，以提供決策者一個理性決策的量測方法。[3]

在圖一中爲現行防範恐怖攻擊的四個工作循環步驟[15]。這循環步驟提供防災機構工作方針，讓防災人員按實際災害情況及現有反制資源做好災害的預防、發現、反制及復原的工作。每個循環步驟必須能適時適量的互助及資源分享，各防災單位也必須有效率地與其它單位協調，並妥善地配置現有的資源[13][14]。本研究爲因應現行的安全警

示等級系統，提出兩個賽局模型分別應用在圖一中兩個灰色部份，第一個恐怖威脅賽局應用於“預防”的步驟，它計算各區域的威脅強度（值），當發現威脅徵兆時，警示系統提昇安全警示等級後，我們提出第二個資源配置賽局應用於”反制”的工作，它可以依據不同的警示等級，提供維安部隊指揮官一個資源配置的建議表。

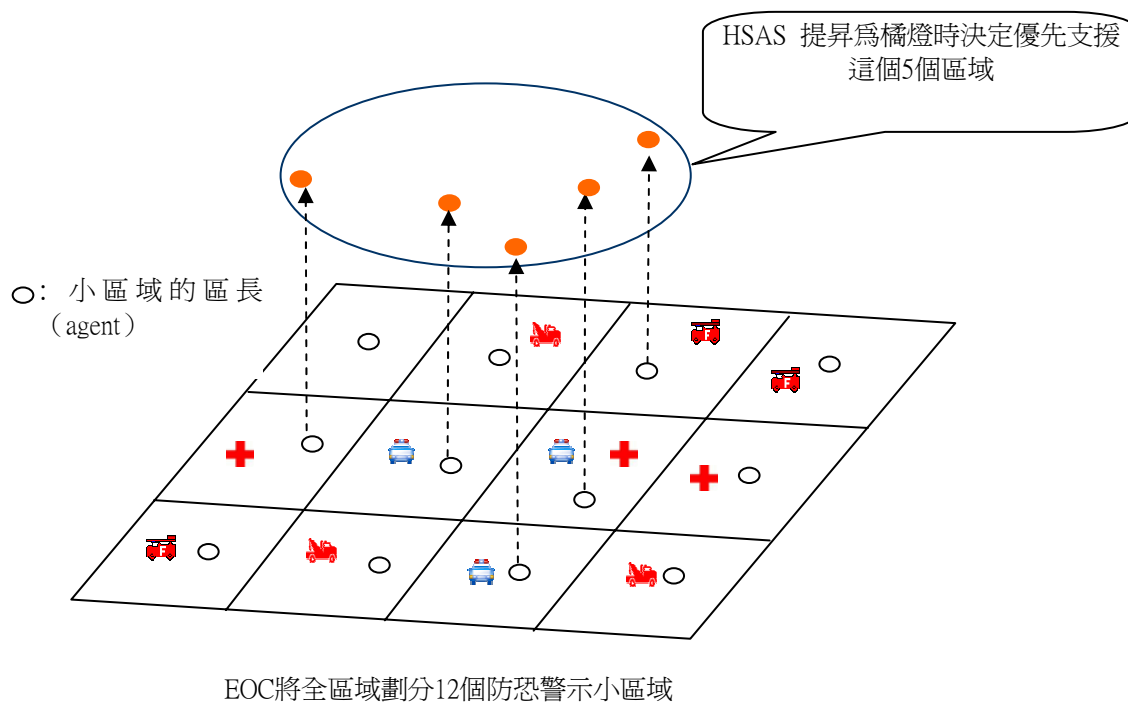
2.本研究的動機與貢獻

在 multicrisis 事件的管理範疇裏，輕忽或省略任何可用資源，往往會造成嚴重的後果。目前有許多的賽局模型的研究，他們分析特定系統中多個代理人間資源的競爭與互動過程[4]，這些多個代理人間的互動過程中，整體性的結果取決於所有自利的代理人，他們同時考量資源最佳化的行為來達成整體的目標[9]。因此，本研究應用賽局理論開發一個可分配多重代理人資源的架構（Deploying multiple Response Agents using Game theory: DRAG），它不只分析恐怖攻擊的威脅強度，還提供緊急事件管理的決策支援工具。DRAG 應用區域防守的概念，讓城市維安部隊指揮官間互相支援合作，以達到資源互助的目標，DRAG 亦可以配合國土安全警示系統，幫助我們建一個賽局決策支援系統，以此系統估算各區域的恐怖威脅值。然後根據不同的安全警示等級來警示重要或合適的維安區域，以充分利用所有維安區域的資源。

本研究的第一個模型和 Ranganathan 等學者[11]所提出的模型類似，他們的賽局模型分析三種緊急事件（火災、交通事故及街頭暴動事件）的互動關係，並且建構一個非合作賽局，把這三個緊急事件當作三個玩家，在這個賽局中，會同時考量每個玩家的自身效益，以此最佳化計算每個緊急事件需要的資源種類及數量，但是他們的模型遭遇到彈性及可擴性的問題，也就是當緊急事件增多時，他們的模型就無法計算，而本研究修改他們的模型，並結合兩個不同的模型來改進可擴性的問題。[1][16]

首先，第一個賽局模式化兩個玩家的互動過程，第一個玩家為「發生 multicrisis 事件」，這些事件包括恐怖攻擊、火災、街頭暴力事件及交通事故；第二個玩家為「小區域的維安部隊指揮官」，他是負責區域內的資源調配與指揮，我們將這兩個玩家的互動過程對應為一個非合作有限的零和賽局。這賽局依據 multicrisis 事件的測量要素及維安部隊的資源多寡與遠近，來計算雙方的報酬函數，根據雙方提供策略的測量安全因子（例如：處理事件的優先順序、緊急事件發生的需求量、反制資源的現有數量以及反制資源到達的時間等），建構雙方的支付函數 (payoff function)，之後再利用這些函數算出發生恐怖攻擊的混合策略均衡值 (mixed strategy Nash equilibrium)，將這值當作小區域的恐怖炸彈攻擊威脅值 (terrorist threat value: TTV)。

第二個模型在各區域的維安部隊指揮官間，建構一個資源分享的合作賽局。夏普利值是一個能力指標性的計算，它可以基於各個代理人的平均邊際貢獻下得到一個可行的代理人配置集合[7]。我們將各小區域的恐怖攻擊威脅值建構安全警示等級的門檻值，然後緊急事件管理者根據這些不同等級的門檻值，能夠很容易的發現那裏的維安區域較危險？並將整區的有限資源作有合理的分配。本研究以數值模擬來驗證模型的可行性，先計算各維安區域的安全威脅值，再依據不同的安全警示等級來計算各 multicrisis 事件區域的夏普利值，實驗結果確實可提供緊急事件管理者，一個配置有限資源的偏好建議表。



圖二：當都會地理區域提昇恐怖攻擊安全警示等級，EOC可以決定優先支援那些小區域

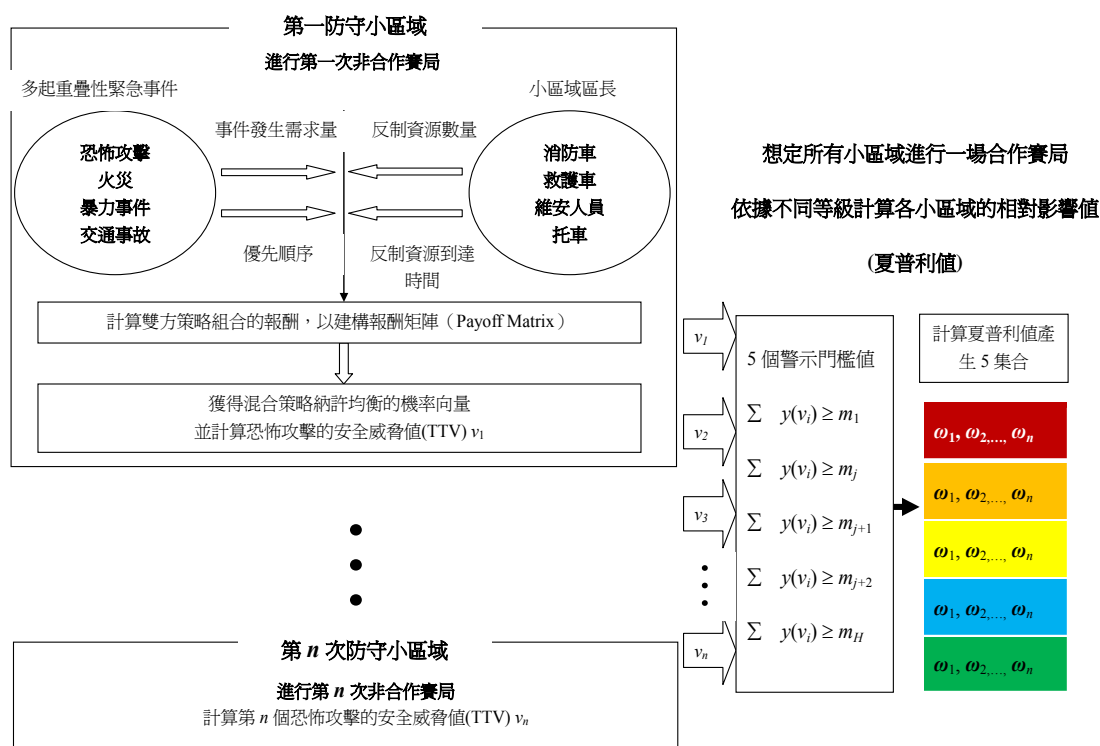
二、維安部隊的安全警示轄區

一般危害安全的緊急事件有交通意外事件、火災或幫派暴力事件等等，恐怖攻擊為特殊的緊急事件，本研究同時考量這四種不同的緊急事件。依據Perry (2003)學者[10]定義“恐怖攻擊”為一種軍事行動、政治手段或混合軍事與政治的方式呈現，恐怖攻擊常常發生在警戒鬆懈、無防禦設施或維安部隊固守薄弱的重要目標，攻擊的方法常包括自殺炸彈攻擊、劫持民航客機、刺殺行動等等，本文主要研究“自殺炸彈”的攻擊方式。

圖二中列出一個假設情境，如果恐怖份子計劃攻擊一個都會區域，它可能會在各小區域中發動多起的炸彈攻擊，而各小區域有可能會臨時面對多起的緊急事件（例如：火災、車禍及街頭暴力）。在都會區域中設有一個緊急事件管制中心（EOC），負責掌管全區域的維安資源，它將全區域劃分12個防恐警示小區域（response districts）（如圖二） $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}\}$ ，每一個小區域由一區長（agent）負責該區域的緊急事件監控與處理，並調配與管理小區域的反制資源（救護人員、維安人員、消防車及拖吊車），區長備有這些反制資源，以因應多起緊急事件發生的需求。緊急事件管制中心能立即的配置不同的資源與數量給需要的區長，這些區長有了EOC的配置指示，就算整體的資源是有限，仍然可以依照配置表來調動資源，以提昇反制恐怖攻擊與災難復原的能力，並降低恐怖攻擊的破壞與殺傷力。

在圖二，本研究假設EOC指揮官可以利用我們提出的架構，依不同的安全警示燈號標示特定範圍的支援區域，將全區域的反制恐怖攻擊的資源做最密集而有效的增援，以有限的資源，發揮最大的成效。再者，每個小區域資源的分配，不只考量自身當時的緊急事件狀況與災害大小，還要檢視其它區域的狀況及反恐能力，一個小區域遭受自殺炸彈攻擊會產生一定的威脅，我們用所有小區域的威脅值平均計算五個安全警示等級的門檻值 h （綠、藍、黃、橘及紅），有了這五個門檻值，我們就可以依據五個門檻值，

在恐怖份子還未發生協同式多起的自殺炸彈攻擊事件時，算出每一小區域的威脅群聚影響數值，以這數值計算各小區域的夏普利值，得到所有小區域的夏普利值集合為 $Z^h = \{\omega_1^h, \omega_2^h, \omega_3^h, \dots, \omega_i^h\}$, $\forall i \in N$ 。最後，EOC維安部隊指揮官，可以依不同的安全警示等級決定優先支援那些小區域？迅速地調動其它小區域內的反制資源，使得全區域的反制資源能發揮最大的功效。



圖三: DRAG提供不同安全警示等級最佳化反制資源的流程圖

三. DRAG架構

本研究專門為安全警示等級系統設計一個都會區域反恐資源配置的賽局架構，這架構由兩個賽局模型所組成，分別於兩個階段來計算不同安全警示等級的全區域資源配置表，第一個階段是恐怖威脅賽局（非合作賽局），第二階段是反制資源配置賽局（合作賽局）。

圖三顯示DRAG提供不同安全警示等級最佳化反制資源的流程，第一階段計算每一個小區域的恐怖炸彈攻擊的安全威脅值(TTV)，步驟如下：

- 1.我們將所有小區域的兩個玩家為「發生多起緊急事件」及「小區域的區長」的互動過程對應在一個非合作有限的零和賽局。
- 2.考量測量與評估威脅的影響因素，如處理事件的優先順序、緊急事件發生時的反制資源需求量、反制資源的現有數量以及反制資源處理的時間。
- 3.然後，計算雙方策略組合的報酬，以建構報酬矩陣，由這報酬矩陣獲得混合策略納許均衡的機率值向量，以恐怖攻擊的混合策略納許均衡值作為該小區域的安全威脅值(TTV) v_i 。

第二階段計算不同安全警示等級各小區域的反制資源配置表，步驟如下：

- 1.在各小區域的維安部隊指揮官（區長）間建構一個資源配置的合作賽局。
- 2.將所有小區域的安全威脅值加總後，平均計算五個門檻值以便於劃分五個安全警示等級。

24 以賽局決策模型支援國土安全警示系統

3. 依五個不同的安全警示等級的威脅門檻值計算所有安全威脅值的結盟數值，如果這值大於等於門檻值時，就累計該威脅值的夏普利值。
4. 最後我們會得到五個不同安全警示等級的夏普利值配置集合，以提供緊急事件管理者一個配置有限資源的偏好建議表。

表一：不同類型的緊急事件對於不同資源的需求量及不同緊急事件的處理優先順序

	維安人員		消防車	拖吊車	優先順序 (1-4)
	救護車				
恐怖攻擊	4	5	2	1	4
火災	3	1	5	2	3
暴力事件	2	5	1	1	3
交通事故	3	1	1	5	1
合計	12	12	9	9	

表二：全區域中反制資源的現有數量

	警察局		消防局	拖吊場
	醫院			
救護車	10	-	-	-
警車	-	10	-	-
消防車	-	-	8	-
拖吊車	-	-	-	8

表三：不同的資源處理不同緊急事件平均所需的時間

	維安人員		消防車	拖吊車
	救護車			
恐怖攻擊	30	30	30	30
火災	10	10	10	10
暴力事件	10	10	10	10
交通事故	20	20	20	20
合計	70	70	70	70

這些平均時間數據可來自每年的平均演練

1. 模型的假設

當我們假定多起的緊急事件防範與管理是一個賽局理論的架構時，有以下假設的條件：

- (1) 在國土安全警示系統當中，不同的區域裏可能會同時發生多起的緊急事件（時間會重疊），EOC指揮官會按不同的安全警示等級，傳送資源分配表給各小區域區長，以利增援其它小區域。每一小區域內發生的多起緊急事件會進行一場：多起緊急事件與區長間同步出手的雙人、零和非合作賽局。區長負責指揮與調度該區的反制資源，並回報多起緊急事件的狀況給EOC。當發生多起緊急事件時，直接與間接的受益者是恐怖份子。本研究設定玩家1是多起緊急事件與玩家2是區長。
- (2) 第一階段的賽局模型是報酬矩陣形式（Normal form）賽局，每一個玩家都知道另一個玩家的策略有那些？也知道大家的資訊有那些？例如處理事件的優先順序、緊急事件發生的需求量、以及反制資源（救護人員、維安人員、消防車及拖吊車）的現有數

量以及反制資源處理的時間等等，本研究假設以上這些資訊是透明的，雙方都知道的資訊。事先都知道對方的策略，雙方儘可能會尋求自己利益最大化。

- (3)我們假設EOC會設計一個演練計劃來測試維安部隊的處理緊急事件能力，在表三每一小區域中不同的資源，處理不同緊急事件平均所花費的時間，我們可以經由每年的平均演練獲得這些平均時間數據。
- (4)本研究參考Ranganathan等學者[11]提出的影響因子，建構表一至三，以做為計算模型的依據。

表四: 恐怖威脅賽局的報酬矩陣

		玩家2			
		d_1	d_2	d_3	d_4
玩家1		救護車	消防車	警車	拖吊車
u_1	炸彈攻擊	$\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{1,1}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \left(\frac{t_{all1}}{t_{1,1}} \right) P_1$	$\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{1,2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \left(\frac{t_{all2}}{t_{1,2}} \right) P_1$	$\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{1,3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \left(\frac{t_{all3}}{t_{1,3}} \right) P_1$	$\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{1,4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \left(\frac{t_{all4}}{t_{1,4}} \right) P_1$
u_2	火災	$\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{2,1}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \left(\frac{t_{all1}}{t_{2,1}} \right) P_2$	$\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{2,2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \left(\frac{t_{all2}}{t_{2,2}} \right) P_2$	$\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{2,3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \left(\frac{t_{all3}}{t_{2,3}} \right) P_2$	$\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{2,4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \left(\frac{t_{all4}}{t_{2,4}} \right) P_2$
u_3	暴力事件	$\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{3,1}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \left(\frac{t_{all1}}{t_{3,1}} \right) P_3$	$\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{3,2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \left(\frac{t_{all2}}{t_{3,2}} \right) P_3$	$\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{3,3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \left(\frac{t_{all3}}{t_{3,3}} \right) P_3$	$\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{3,4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \left(\frac{t_{all4}}{t_{3,4}} \right) P_3$
u_4	交通事故	$\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{4,1}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \left(\frac{t_{all1}}{t_{4,1}} \right) P_4$	$\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{4,2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \left(\frac{t_{all2}}{t_{4,2}} \right) P_4$	$\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{4,3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \left(\frac{t_{all3}}{t_{4,3}} \right) P_4$	$\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{4,4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \left(\frac{t_{all4}}{t_{4,4}} \right) P_4$

2. 恐怖威脅賽局

第一個賽局模型將「發生多起緊急事件」及「小區域的區長」的互動行為建構為一個雙人非合作賽局，從這個賽局中計算一個恐怖炸彈攻擊的威脅值（TTV）。因為這個恐怖炸彈的威脅值是以對手（敵人）的觀點著手，它可以補足單純考量多起緊急事件和反制資源的量測維度。在本研究假設有兩個玩家 $\{I_1, I_2\}$ ， I_1 是「小區域發生多起緊急事件」，它是發生事件者， I_2 是「小區域的區長」，它是處理事件者，以下定義賽局模型使用的參數：

玩家1（發生事件者）：在恐怖威脅賽局裏，我們假設 S_1 是玩家1的策略集合（多起緊急事件） $S_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{\text{恐怖攻擊、火災、街頭暴力事件及交通事故}\}$ ，事件愈嚴重，需要反制的資源就愈多，相對恐怖份子的獲利就愈多，所以我們可以想像在多起緊急事件（玩家1）的背後受益或損失者是恐怖份子。在一小區域中各緊急事件的需求數 W_k ： $W = \{W_1, W_2, \dots, W_k\}$ 。 $w_{k,i}$ 指在 u_k 的緊急事件中對應 d_i 資源的需求數量。再者，我們假定不同緊急事件危險程度大小會有不同的處理優先順序，需要的反制資源也會不同。一般來說，較高優先的緊急事件，例如恐怖炸彈攻擊需要較多的反制資源；而較低優先的緊急事件，例如交通事故需要較少的反制資源，每一個玩家會設定4個優先順序（ P_1 到 P_4 ，大小從1到4）來標示事件的優先順序， $P_1=1$ 是最低優先， $P_4=4$ 是最高優先。本研究以這值當作計算報酬的權重。

玩家2：處理事件者，在一場賽局裏，每一小區域都有一個區長負責該區反制資源的指揮與調度，當發生多起緊急事件時，她（他）會運用4種資源加以反制，玩家2的策略集合為（反制資源） $S_2 = \{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{\text{救護車、警車、消防車及拖吊車}\}$ 。 O 是指全區域中每個小區域內現有資源的數量： $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ ， o_i 指在小區域中， d_i 資源的現有數量， $t_{k,i}$ 是指 d_i 資源處理 u_k 緊急事件所需的時間。本研究假設區長反制緊急事件的時間，其包括人員的調動、裝備整備，以及實地的處理時間，這時間由年度演練獲得。當發生多起緊急事件時，維安部隊指揮官需花較多的時間處理緊急事件，他的報酬會因此降低，因此恐怖份子獲得的報酬就愈多；相反地，如果花的時間愈少，他的報酬會升

高，恐怖份子獲得的報酬因此就會減少。在表三中，如果判定為恐怖炸彈攻擊，其處理的時間會較多（單位時間為30），因此恐怖份子獲得的報酬較多，而區長獲得報酬較少。如果小區域內發生火災或暴力事件時，維安部隊處理的時間相對較少（單位時間為10），區長損失較少，而恐怖份子獲得的報酬較少。

在這不合作賽局中，雙方同時運用4個策略，它們之間的策略互動會形成一個4x4恐怖威脅賽局的報酬矩陣（如表四）。由於我們設定是零和賽局，因此防守者（事件處理者）的損失就是攻擊者（事件發生者）的獲得，攻擊者的損失就是防守者的獲得。第一個賽局模型裏，防守者是小區域的區長（玩家2），他必須儘可能的減少緊急事件對人員傷亡及財產的損失，如果現有的資源數量 o_i 無法應付緊急事件的需求數 $w_{k,i}$ ，當需求數愈大，區長付出的成本代價就愈高，相對地得到的報酬就愈小，我們用正的符號(+), 來顯示玩家1得到的報酬（payoff），當玩家1發生第 k 個緊急事件時，玩家2採用第 i 個資源予以處理，玩家1的獲得報酬函數如下：

$$\pi_1 = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{w_{S(k=1..n),i}}{o_i - w_{k,i}} - \frac{w_{S(k=1..n),i}}{o_i} \right) \left(\frac{t_{S(k=1..n),1}}{t_{k,li}} \right) P_k \quad (1)$$

因為這模型為雙人零和、非合作賽局，相對地，玩家2會失去報酬，所以我們用負的符號(-)，來顯示他（她）的報酬，因此區長（玩家2）得到的報酬是多起緊急事件發生者（玩家1）的負值，他（她）的獲得報酬函數如下：

$$\pi_2 = - \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{w_{S(k=1..n),j}}{o_i - w_{k,i}} - \frac{w_{S(k=1..n),j}}{o_i} \right) \left(\frac{t_{S(k=1..n),1}}{t_{k,li}} \right) P_k \quad (2)$$

在方程式(1)和(2)中 $w_{S(k=1..n),j}$ = 所有緊急事件對第 i 個資源的需求量，例如在表一第一欄中，恐怖攻擊、火災、街頭暴力事件及交通事故4個緊急事件需要救護車的總數為12（ $w_{S(k=1..4),1}=12$ ）。 $w_{k,i}$ 指在 u_k 的緊急事件中對應 d_i 資源的需求數量，例如在表一第一欄的第一列中，恐怖攻擊需要救護車4個單位。

$\frac{w_{S(k=1..n),j}}{o_i}$ = 所有緊急事件對第 i 個資源的總需求數量 / 第 i 個資源的可獲得數量。

$\frac{w_{S(k=1..n),j}}{(o_i - w_{k,i})}$ = 所有緊急事件對第 i 個資源的需求數量 / 第 k 個緊急事件對第 i 個資源可獲得的數量與第 i 資源的需求數量之差，因為 $S(k=1..n)=all$ ，以下我們把 $w_{S(k=1..n),j}$ 簡化成 $w_{all,i}$ 。

$\frac{w_{all,i}}{(o_i - w_{k,i})}$ 和 $\frac{w_{all,i}}{o_i}$ 之差代表第 i 個資源在面對第 k 個緊急事件的付出成本，這相反就是玩家1得到的報酬。 P_k 指在第 k 個緊急事件的優先順序值。區長用第 i 個資源去處理所有緊急事件所花的時間總合與第 i 個資源去處理第 k 個緊急事件的時間，兩者之間的比例為 $\frac{t_{all,i}}{t_{k,i}}$ 。

$P_k \times \frac{t_{all,i}}{t_{k,i}}$ = 代表第 i 個資源處理時間所付出的成本，玩家2付出的時間愈多，報酬就愈少，相對地，玩家1得到的報酬愈多，其付出的成本就愈少。

我們假設在本研究的恐怖威脅賽局沒有純粹策略均衡。所以我們用純粹策的隨機分布概念，來計算各個玩家的混合策略均衡機率值[2]。

u_1 代表多起緊急事件中的發生恐怖份子炸彈攻擊策略， $r(u_1)$ 代表它的混合策略機率值。

u_2 代表多起緊急事件中的發生火災事件的策略， $r(u_2)$ 代表它的混合策略機率值。

u_3 代表多起緊急事件中的發生暴動事件的策略， $r(u_3)$ 代表它的混合策略機率值。

u_4 代表多起緊急事件中的發生交通事件的策略， $r(u_4)$ 代表它的混合策略機率值。

再者， d_1 代表區長運用反制資源中救護車的策略， $q(d_1)$ 代表它的混合策略機率值。

d_2 代表區長運用反制資源中警車的策略， $q(d_2)$ 代表它的混合策略機率值。

d_3 代表區長運用反制資源中消防車的策略， $q(d_3)$ 代表它的混合策略機率值。

d_4 代表區長運用反制資源中拖吊車的策略， $q(d_4)$ 代表它的混合策略機率值。以上參數值為任一0到1的小數值， $0 \leq r(u_1), r(u_2), r(u_3), r(u_4), q(d_1), q(d_2), q(d_3), q(d_4) \leq 1$ 。 $r(u_1) + r(u_2) + r(u_3) + r(u_4) = 1$; $q(d_1) + q(d_2) + q(d_3) + q(d_4) = 1$ 。

我們求解賽局均衡時，設定雙方有一組混合策略均衡機率值為 (r^*, q^*) ，依據表四恐怖威脅賽局的報酬矩陣，每個玩家策略的期望報酬會相等[4]，在附錄一我們計算玩家雙方的混合策略機率值 (r^*, q^*) ，這一機率組合為雙方最適策略反應的機率值，我們依混合納許均衡定理：如果一個賽局沒有純粹策略均衡，必定存在一組混合策略均衡。所以我們可以求解玩家1的混合策略機率向量為 $r^* = \{r^*(u_1), r^*(u_2), r^*(u_3), r^*(u_4)\}$ ， $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 為恐怖攻擊、火災、街頭暴力事件及交通事故等多起緊急事件的集合，也可求解玩家2的混合策略機率向量 $q^* = \{q^*(d_1), q^*(d_2), q^*(d_3), q^*(d_4)\}$ ， $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ 為救護車、警車、消防車及拖吊車的反制資源集合，本研究用玩家1的恐怖炸彈攻擊的混合策略機率值為一小區域的安全威脅值(TTV) v_i ，如下：

$$v_i = r_i^*(u_i) \quad (3)$$

3.反制資源配置賽局

本研究假定在都市中所有發生恐怖炸彈攻擊事件的威脅值會互相影響，以及所有小區域的維安部隊指揮官會建立一個資源分享與互助的情境，這情境我們設定為一個合作賽局。當國土安全警示系統提昇安全等級時，全區域中如果同時發生多起的緊急事件，我們發現各小區域內的反制資源數量有限，不足應付所有的事件。EOC的維安部隊指揮官於是需要一個資源合理分配的方法，讓他（她）可以依據不同安全等級去配置各小區域的反制資源。夏普利值是解合作賽局的一種方法[4]，近年來有許多學者應用夏普利值作資源的最佳化分配[7]，有部份研究應用在傳輸系統的能源配置，這些研究也證明傳統的配置方法沒有像夏普利值的計算，可以同時滿足各傳輸節點的需求[17]。因此，本研究提出的第二個模型，是依據不同的安全警示等級計算各小區域的夏普利值來分配反制資源。

我們定義一對一的特徵函數 $y: V \rightarrow \mathbf{R}^+$ ，在所有的安全威脅值 v 中，對應成正實數，例如 $y(0) = 0$ 。假定EOC維安部隊指揮官是以 H 個威脅安全等級來配置小區域的資源 $H = \{h_1, \dots, h_H\}$ ，分別用門檻值 $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_H$ (threshold values) 為區分。給定所有小區域的恐怖炸彈的安全威脅數值 (TTV)，考量全區域中所有小區域的TTV值總和大於或等於門檻值 m_j ，我們就說全區域目前處於 h_j 安全警示等級狀態。我們設定所有安全等級 L ，如方程式(4)，它表達出 h_j ， m_j 和各 $y(v_i)$ 函數值之間的關係：

$$L = \begin{cases} h_1 & \text{if } \sum_{i=1}^N y(v_i) \geq m_1 \\ h_j & \text{if } \sum_{i=1}^N y(v_i) \geq m_j \\ h_{j+1} & \text{if } \sum_{i=1}^N y(v_i) \geq m_{j+1} \\ h_{j+2} & \text{if } \sum_{i=1}^N y(v_i) \geq m_{j+2} \\ h_H & \text{if } \sum_{i=1}^N y(v_i) \geq m_H \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{令 } m_{in} = \left(\frac{v_{Max} - v_{Min}}{H + 1} \right)$$

我們將所有的威脅值平均計算為 H 個門檻值，這平均區間門檻值 m_{in} ，為最大威脅值 v_{Max} 減最小威脅值 v_{Min} 再除以 $H+1$ 。我們依照 m_{in} 來計算每一個安全警示等級的門檻值，所以方程式(4)中 $m_1 = v_{Min} + m_{in}$, $m_j = v_{Min} + jm_{in}$, $m_{j+1} = v_{Min} + (j+1)m_{in}$, \dots , $m_H = v_{Min} + Hm_{in}$ 。

當我們將所有小區域的威脅值依照方程式(4)把安全等級分成 H 個等級後，接下來的問題是如何在成本有限的情況下，以最佳的方式來配置這些反制資源？為了回答此問題，我們可以將這些小區域的TTV值，模式化成一個 N 人的合作賽局，所有參賽者（小區域區長）集合為 $X = \{1, 2, \dots, N\}$ ，當 $V \subset N$, $v_j \neq 0, j \in V$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$, $j \in n$ ，在 N 中所有參賽者的次集合，就是一個結盟(coalition)[4][8]，所以在第 m^{th} 門檻值的安全等級下的結盟是 X 的次集合，因此，我們可以依據不同的安全等級呈現出不同的威脅型態(threat pattern)。

我們設定特徵函數：結盟 C 的群聚值是所有小區域TTV(v_i)的加總 $\sum_{i \in C} y(v_i)$ ，每一個小區域的威脅值屬於一個或多個安全等級中的門檻值，我們就可以根據不同的安全等級，算出各小區域的夏普利值。由於不同的威脅安全等級，可以反應出每個小區域對於其它小區域的相對重要性，設定 $y(C) = \sum_{i \in C} y(v_i)$, $v_i \in V$, $C \subset X$ ， c 是結盟 C 的基數。我們可以計算第 i^{th} 個小區域的夏普利值，計算如下：

$$\omega(i) := \sum_{\substack{C \subset X \\ i \in C}} \frac{(c-1)!(n-c)!}{n!} [y(C) - y(C - \{i\})]. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \omega(i) := \sum_{C' \subset X} \frac{(c-1)!(n-c)!}{n!}. \quad (6)$$

當我們決定第 i^{th} 小區域的安全威脅值是否大於或等於安全水準的門檻值時？「大於或等於」不成立時， $y(C) - y(C - \{i\})$ 這部份產生的值為0，如果成立就產生1的結果，代表在這些小區域的安全威脅值大於或等於門檻值 m_j ，而達到一個成功結盟 C' (winning coalition)， $\sum_{i \in C'} y(v_i) \geq m_j$ ，所以我們可以將方程式(5)可以簡化成方程式(6)。我們有了各小區域不同安全警示等級的夏普利值後，EOC維安部隊指揮官就能以此數值來做反制資源的取捨拿捏，以便於將資源合理的分配。

四. 數值模擬與結果討論

本研究假設在台北市都會區中，有一個緊急應變中心（EOC），EOC將台北市區域分割成12個小區域，每一個小區域都有配置一定數量的反制資源。當國土安全警示系統提升或下降安全警示等級時，它負責依據警示等級統籌管理區域中所有反制資源的分配。本研究利用表一至表三的假設資料，例如在都會區中反制資源的現有數量、不同類型的緊急事件對於不同資源的需求量、不同緊急事件的處理優先順序及不同的資源處理不同緊急事件平均所需的時間。從第1小區域到第10小區域，我們逐漸的增加各反制資源處理恐怖炸彈攻擊的時間，第11到12小區域我們增加恐怖攻擊的需求數量，依據附錄一的計算方式，來計算12個小區域玩家雙方的混合策略均衡機率值，進而計算恐怖炸彈攻擊的12個威脅值（TTV）。

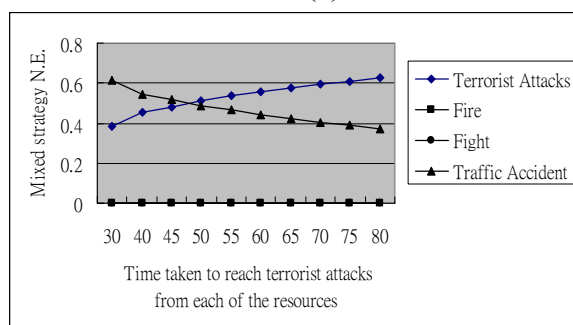
首先第一階段，我們按表一至表三建構12小區域中發生緊急事件及小區域維安部隊指揮官的模擬數字並建構如表四的報酬矩陣，再用現成的軟體GAMBIT [6]分別計算12筆的混合策略均衡值，每個小區域的混合策略均衡機率值及TTV值如表五所示。接著第二階段用12個小區域的TTV值，計算5個安全警示等級的門檻值，這個5個警示等級別為：綠、藍、黃、橘及紅色，再用5個警示等級門檻值，應用Matlab軟體計算方程式(6)，最後得到每一個小區域的夏普利值。（如圖五(b)）

表五: 計算12個小區域的混合策略均衡機率值及TTV值

小區域名稱	恐怖攻擊 $r^*(u_1)=$ TTV(v)	火災 $r^*(u_2)$	暴力事件 $r^*(u_3)$	交通事故 $r^*(u_4)$	救護車 $q^*(d_1)$	警車 $q^*(d_2)$	消防車 $q^*(d_3)$	拖吊車 $q^*(d_4)$
a_1	0.3857	0	0	0.6143	0	0.3205	0	0.6795
a_2	0.4562	0	0	0.5438	0	0.4064	0	0.5936
a_3	0.4821	0	0	0.5179	0	0.4463	0	0.5537
a_4	0.5117	0	0	0.4883	0	0.4752	0	0.5248
a_5	0.5356	0	0	0.4644	0	0.5045	0	0.4955
a_6	0.5569	0	0	0.4431	0	0.5313	0	0.4687
a_7	0.5767	0	0	0.4233	0	0.5552	0	0.4448
a_8	0.5947	0	0	0.4053	0	0.5773	0	0.4227
a_9	0.6111	0	0	0.3889	0	0.5977	0	0.4023
a_{10}	0.6261	0	0	0.3739	0	0.6165	0	0.3835
a_{11}	0.4212	0.1308	0	0.448	0	0.3733	0.0596	0.567
a_{12}	0.408	0.1319	0	0.4602	0	0.2808	0.075	0.6442

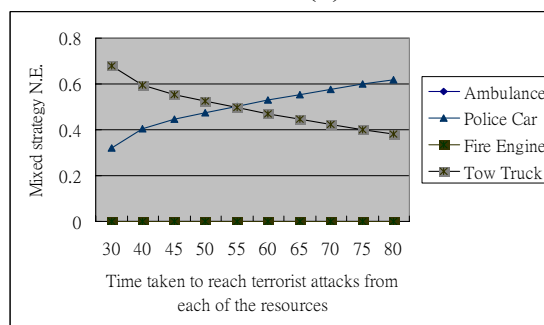
如圖四(a)，當逐漸增加第1小區域到第10小區域恐怖炸彈攻擊的處理時間，我們發現恐怖攻擊的混合策略均衡機率值 $r^*(u_1)=TTV(v)$ 會逐漸升高，這趨勢顯示：處理恐怖攻擊的時間愈長，也就是延誤處理的時效時，維安部隊付出的代價會愈高，相對增加恐怖份子的報酬，也因此增加恐怖攻擊的機率。同樣地，在圖四(b)中，當逐漸增加第1小區域到第10小區域恐怖炸彈攻擊的處理時間，我們也發現反制資源警車的混合策略均衡機率值 $q^*(d_2)$ 也逐漸升高，這顯示：處理恐怖攻擊的時間愈長，愈需要增加警力的支援，以防止付出的代價過高。

圖四(a)



圖四(a): 顯示處理恐怖攻擊的時效與各緊急事件的混合策略均衡機率關係圖。

圖四(b)

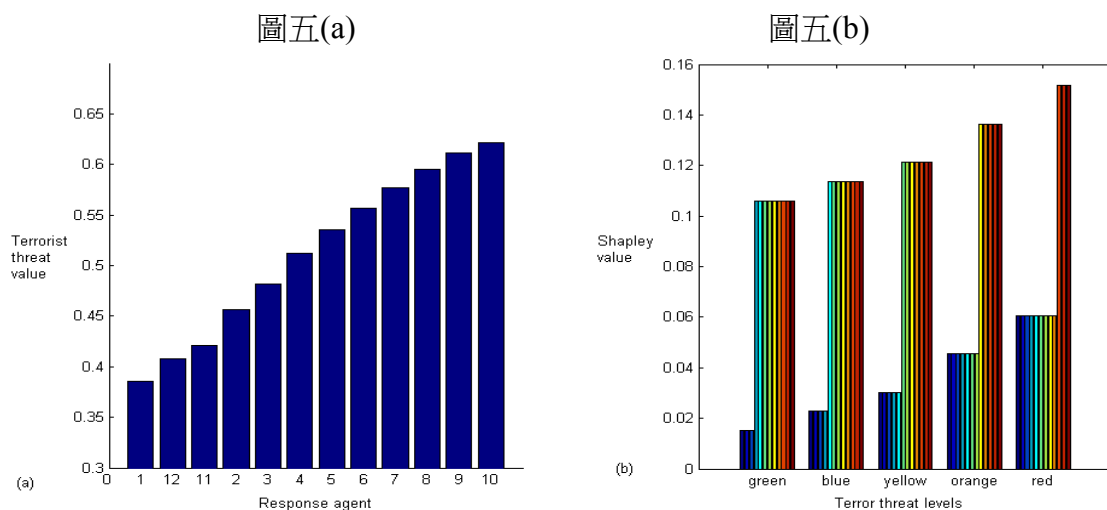


圖四(b): 顯示處理恐怖攻擊的時效與反制資源的混合策略均衡機率關係圖。

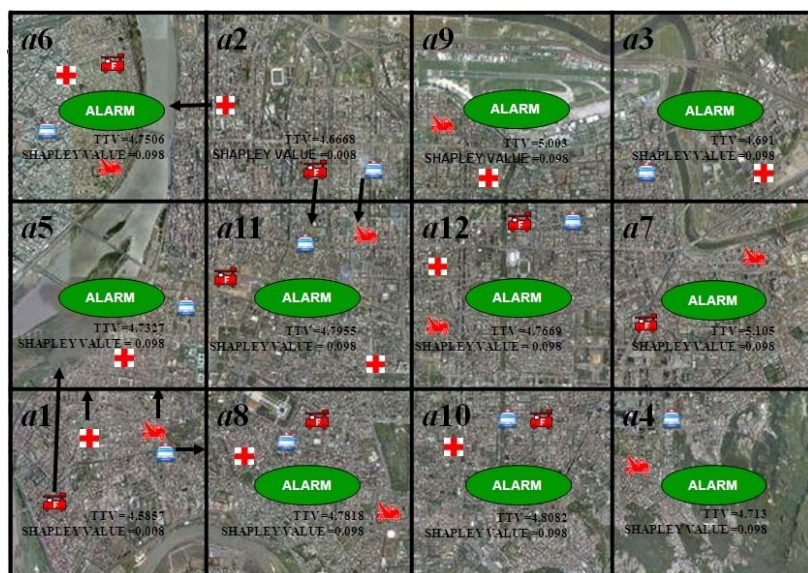
圖五(a)為12個小區域的TTV值， $V = [v_1, v_{12}, v_{11}, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}] = [0.3857, 0.408, 0.4212, 0.4562, 0.4821, 0.5117, 0.5356, 0.5569, 0.5767, 0.5947, 0.6111, 0.6261]$ ，接著以這些值依據方程式(4)計算5個安全警示等級的門檻值： $m_{green} = 0.4257$ ， $m_{blue} = 0.4658$ ， $m_{yellow} = 0.5059$ ， $m_{orange} = 0.5459$ ，and $m_{red} = 0.5860$ 。我們再利用這5個門檻值，依照方程式(6)計算5個警示等級當中各小區域的夏普利值，如圖五(b)。

EOC維安部隊指揮官參考圖四(b)，做為資源分配的依據，如果將夏普利值0.1為一個基準點，夏普利值大於0.1的5個安全警示等級集合為 $Z^{green} = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ ， $Z^{blue} = \{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ ， $Z^{yellow} = \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ ， $Z^{orange} = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ ，and $Z^{red} = \{a_8, a_9, a_{10}\}$ ，如圖六(a)–(e)所示，我們可以發現：當安全警示等級較小時，如綠燈或藍燈，威脅值較低與較高的小區域，它們夏普利值的差距不大；但是在警示等級較高時，如黃燈或紅燈，威脅值較低與較高的小區域，它們夏普利值的差距

就會變的很大。由此可知夏普利值的計算可以讓維安部隊指揮官，根據不同的安全警示等級高低將反制資源做調配。

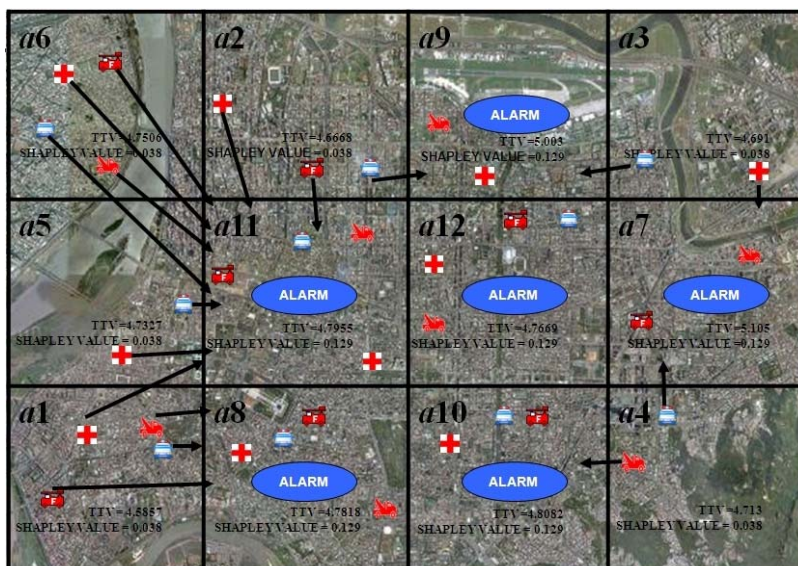


圖五(a): 12個小區域的TTV值。圖五 (b): 依據5個安全警示等級分別計算各小區域的夏普利值

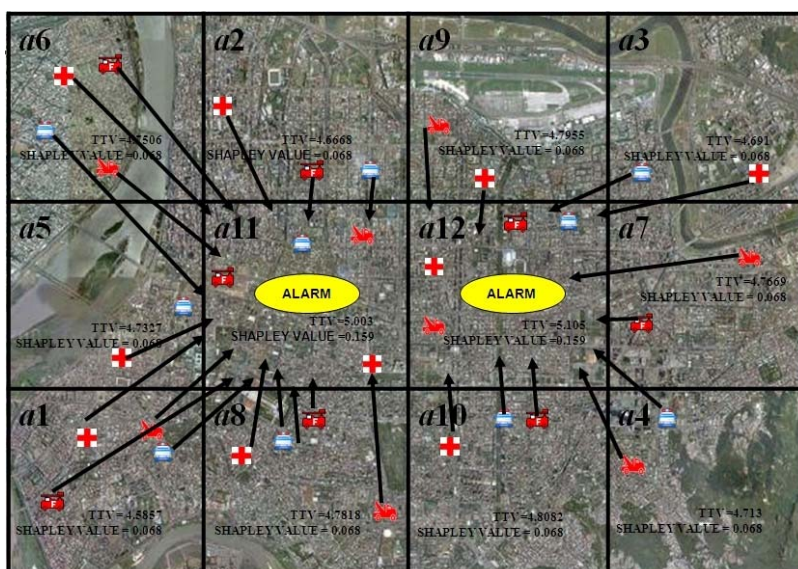


圖六(a): 安全警示等級為綠色時，決定配置的小區域

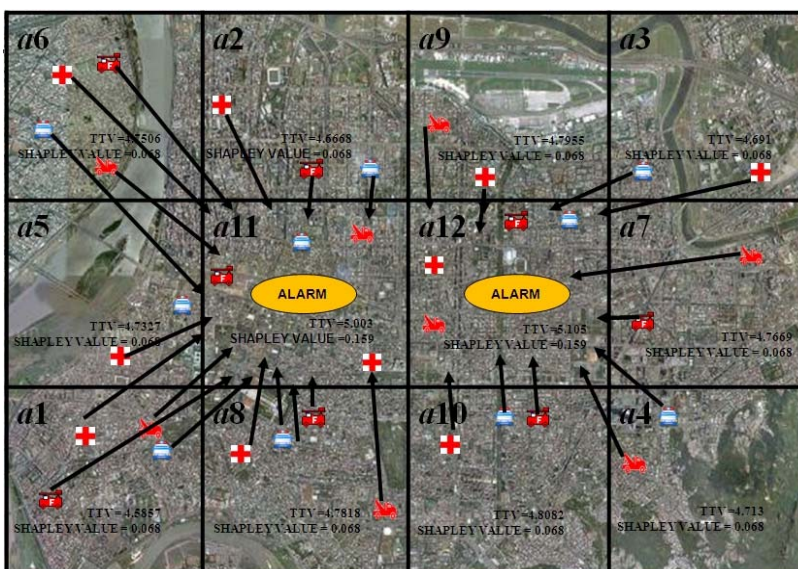
我們比較圖五(a)和圖五(b)，我們無法只用每個威脅值來做反制資源的取捨，但如果我們用安全警示等級大小來區分，就可以依據不同的警示等級決定選擇那些小區域做為支援的對象。尤其在警示等級較高的時候（例如紅燈），高威脅的小區域對於低威脅的小區域，兩者呈現出來的夏普利值差距愈大，也就是高威脅小區域會比低威脅小區域較重要，高威脅的小區域需要的資源數量較高，與低威脅小區域差距較大；相反地，如果在警示等級較低的時候（例如藍燈），高威脅的小區域對於低威脅的小區域，兩者呈現出來的夏普利值差距卻很小，它們之間的需求數差距較小，所以夏普利值的計算符合威脅高低的資源需求。



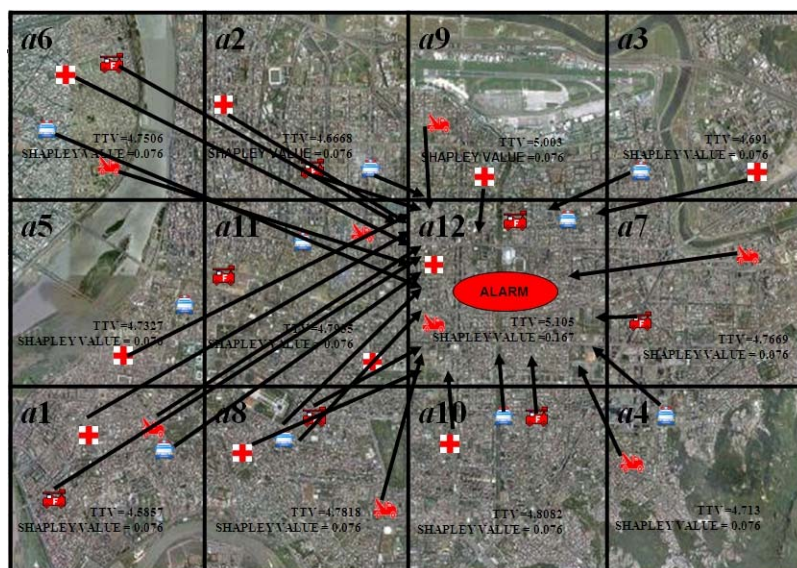
圖六(b): 安全警示等級為藍色時，決定配置的小區域



圖六(c): 安全警示等級為黃色時，決定配置的小區域



圖六(d): 安全警示等級為橘色時，決定配置的小區域



圖六(e): 安全警示等級為紅色時，決定配置的小區域

當反制資源有限時，國土安全部將安全警示等級提昇為紅燈，EOC維安部隊指揮官可以將預備的反制資源配置在少數威脅值較大的小區域，如果發生炸彈攻擊時，各區域的資源知道去增援那個重點區域，以最少的資源做重點性的反制，例如本實驗假設全區域反制資源有限，只有10台救護車、10台警車、8台消防車以及8台拖吊車，在圖六(e)中，經由我們提出的架構，會將這些有限的資源配置給3個較高夏普利值的小區域。這些重點小區域的鄰近小區域會將它們的反制資源投入給3個重點小區域。在圖六(a)中，國土安全部將安全警示等級降為綠燈時，EOC維安部隊指揮官可以將反制資源平均的分配給9個小區域，並透過監控與觀察，以預防恐怖炸彈攻擊的發生。

本研究因應國土安全部門發佈安全警示等級時，提供EOC維安部隊指揮官一個偏好尺度 (preference)。在 multicrisis 事件發生的區域中，依不同的警示等級決定優先支援那些小區域？迅速地調動其它小區域內反制資源，使得全區域有限的反制資源能發揮最大的功效。由實驗模擬的結果我們可知：本架構量化不同的緊急事件與反制資源的互動關係，決策者依據提供的數值可以合理的分配全區域4個反制資源。在警戒程度較低時，管理者可以把全區域內所有的資源均分給多數的小區域，達到「防微杜漸」的功能；而在警戒程度較高時，把所有的資源給少數的重點小區域，達到「抓大放小」的取捨，緊急事件管理者應用本架構可以量化評估那個小區域是較危險？以增加EOC指揮官處理恐怖炸彈攻擊的反應能力。

五. 結論與未來方向

現行安全警示等級系統缺少一個理性決策的量測方法，也沒有提供數學的模型來模式化攻擊者與防衛者間的互動行為，以致無法有效發揮預警與反制的功能。本研究設計一個兩階段的賽局模型，支援國土安全警示系統的“預防”與“反制”的步驟。第一個模型將每一小區域中發生 multicrisis 事件和區長之間的互動行為，模式化在一個零和賽局中，並產生小區域恐怖炸彈攻擊的威脅值。第二個模型加總各小區域的威脅值並計算五個警示等級門檻值，再依據不同等級門檻值及所有區域的威脅值，計算每一個區域的夏普利值，以這夏普利值集合提供EOC維安部隊指揮官一個資源配置的建議表。實驗的結果讓我們確認本架構可以結合非合作賽局的“混合策略納許均衡”與合作賽局的“夏普利值”計算方法，數值模擬的成效讓我們非常興奮，也激起未來研究其它類似資源分配的興趣(例如地震時人員疏散地點的配置)，未來更希望以實際的數值計算來驗證本模型的效率。

參考文獻

- [1] Alpcan T., Basar T. 2003. "A game theoretic approach to decision and analysis in network intrusion detection," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2595-2600.
- [2] Basar T., Olsder G. J. 1999." *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Philadelphia, Academic Press," Inc.
- [3] Christopher G. R. 2007. "Homeland Security Preparedness and Planning in US City Governments: *A Survey of City Managers*," *Journal of Contingencies and Crisis Management*, vol 15, pp.157-167.
- [4] Dixit A., Skeath S. 2001. *Games of Strategy*, W. W. Norton & Company.
- [5] <http://www.dhs.gov/index.shtm>.
- [6] McKelvey, Richard D., McLennan, Andrew M., and Turocy, Theodore L. 2007. Gambit: Software Tools for Game Theory, <http://gambit.sourceforge.net/>.
- [7] Mishra D., Rangarajan B. 2005. "Cost Sharing in a Job Scheduling Problem Using the Shapley Value," *Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic commerce*, pp. 232--239.
- [8] Owen G. 2001. *Game Theory*, 3rd Ed. New York, NY: Academic Press.
- [9] Parsons S., Wooldridge M. 2002. "Game Theory and Decision Theory in Multi-Agent Systems," *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, vol. 5, pp. 243--254 (2002).
- [10] Perry, R.W. 2003. "Emergency Operations Centers in an Era of Terrorism: Policy and Management Functions," *Journal of Contingencies and Crisis Management*, 11(4), pp. 151-159.
- [11] Ranganathan N., Gupta U., Shetty R. and Murugavel A. 2007. "An Automated Decision Support System Based on Game Theoretic Optimization for Emergency Management in Urban Environments," *Journal of Homeland Security and Emergency Management*, volume 4, issue 2, article 1.
- [12] Ranganathan N., Gupta U., Shetty R. and Murugavel A. 2007. "Social Fairness in Multi-Emergency Resource, Management," *IEEE International Symposium on Technology and Society*, vol. 4/issue 2.
- [13] Turoff, M., Chumer, M., Van de Walle, B., and Yao. X. 2004. "The Design of a Dynamic Emergency Response Management Information System (DERMIS)," *Journal of Information Technology Theory and Application*, 5(4), pp.1-35.
- [14] Wendy A. Schafer, John M. Carroll, Steven R. Haynes, Stephen Abrams, 2008. "Emergency Management Planning as Collaborative Community Work," *Journal of Homeland Security and Emergency Management*, vol. 5/issue 1.
- [15] William V. Pelfrey, 2005. "The Cycle of Preparedness: Establishing a Framework to Prepare for Terrorist Threats," *Journal of Homeland Security and Emergency Management*, volume 2, issue 1, article 5.
- [16] Yi-Ming Chen, Dachrahn Wu, Cheng-Kuang Wu, 2008. "A game theory approach for an emergency management security advisory system," *IEEE International Conference on Intelligence and Security Informatics*, pp. 116-121.
- [17] Zolezzi J. M., Rudnick H. 2002. "Transmission Cost Allocation by Cooperative Games and Coalition Formation," *IEEE Transactions on power systems*, vol. 41, pp. 1008--1015.

[謝啓]

感謝審稿者能夠撥冗指正本研究，並給予真誠的建議，特此致謝。

附錄

1. 玩家2的每一個策略的期望報酬相等，因此可以表示如下：

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i1}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{11}} \right) \times P_1 \times r(u_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i2}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{21}} \right) \times P_2 \times r(u_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i3}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{31}} \right) \times P_3 \times r(u_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i4}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{41}} \right) \times P_4 \times r(u_4) \right) \\
& = \\
& \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{13}} \right) \times P_1 \times r(u_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i2}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{23}} \right) \times P_2 \times r(u_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{33}} \right) \times P_3 \times r(u_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i4}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{43}} \right) \times P_4 \times r(u_4) \right) \\
& = \\
& \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{12}} \right) \times P_1 \times r(u_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{22}} \right) \times P_2 \times r(u_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i3}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{32}} \right) \times P_3 \times r(u_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i4}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{42}} \right) \times P_4 \times r(u_4) \right) \\
& = \\
& \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{13}} \right) \times P_1 \times r(u_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{23}} \right) \times P_2 \times r(u_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{33}} \right) \times P_3 \times r(u_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{43}} \right) \times P_4 \times r(u_4) \right)
\end{aligned}$$

我們可以求解玩家1的各混合策略納許均衡的機率向量為 $r^* = \{r^*(u_1), r^*(u_2), r^*(u_3), r^*(u_4)\}$ 。

2. 玩家1的每一個策略的期望報酬相等，因此可以表示如下：

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i1}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{11}} \right) \times P_1 \times q(d_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{12}} \right) \times P_1 \times q(d_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{13}} \right) \times P_1 \times q(d_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{i4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \times \left(\frac{t_{all4}}{t_{14}} \right) \times P_1 \times q(d_4) \right) \\
& = \\
& \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i2}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{21}} \right) \times P_2 \times q(d_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i2}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{22}} \right) \times P_2 \times q(d_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{23}} \right) \times P_2 \times q(d_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{i4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \times \left(\frac{t_{all4}}{t_{24}} \right) \times P_2 \times q(d_4) \right) \\
& = \\
& \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i3}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{31}} \right) \times P_3 \times q(d_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i3}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{32}} \right) \times P_3 \times q(d_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i3}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{33}} \right) \times P_3 \times q(d_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{i4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \times \left(\frac{t_{all4}}{t_{34}} \right) \times P_3 \times q(d_4) \right) \\
& = \\
& \left(\left(\frac{w_{all1}}{o_1 - w_{i4}} - \frac{w_{all1}}{o_1} \right) \times \left(\frac{t_{all1}}{t_{41}} \right) \times P_4 \times q(d_1) \right) + \left(\left(\frac{w_{all2}}{o_2 - w_{i4}} - \frac{w_{all2}}{o_2} \right) \times \left(\frac{t_{all2}}{t_{42}} \right) \times P_4 \times q(d_2) \right) + \left(\left(\frac{w_{all3}}{o_3 - w_{i4}} - \frac{w_{all3}}{o_3} \right) \times \left(\frac{t_{all3}}{t_{43}} \right) \times P_4 \times q(d_3) \right) + \left(\left(\frac{w_{all4}}{o_4 - w_{i4}} - \frac{w_{all4}}{o_4} \right) \times \left(\frac{t_{all4}}{t_{44}} \right) \times P_4 \times q(d_4) \right)
\end{aligned}$$

我們可以求解玩家1的各混合策略納許均衡的機率向量為 $q^* = \{q^*(d_1), q^*(d_2), q^*(d_3), q^*(d_4)\}$ 。